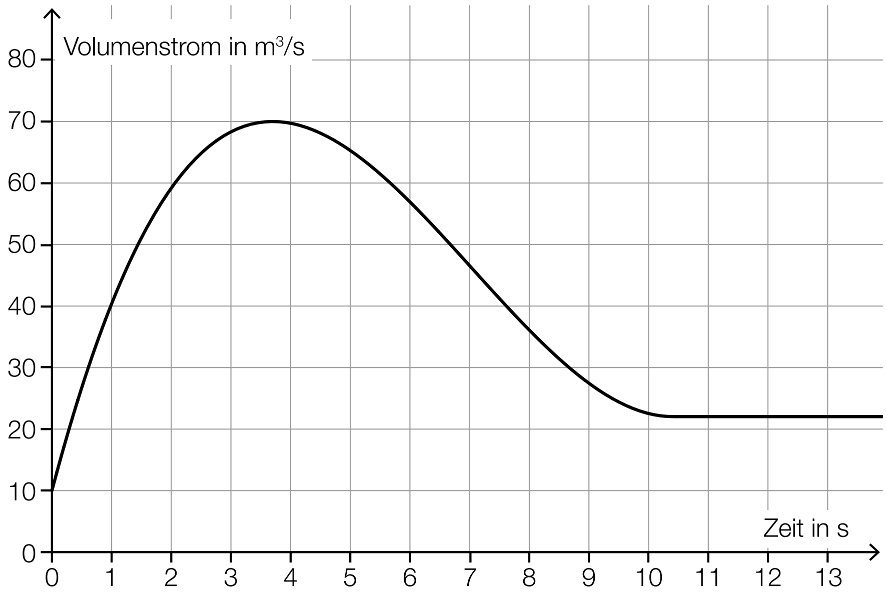
Volumenstrom (1)

Wasser einer Staustufe wird über Kanäle in einen Fluss abgelassen.
Das Wasservolumen, das pro Zeiteinheit an einer Messstelle vorbeifließt, bezeichnet man als Volumenstrom.
Nach dem Öffnen des Tores gibt es einen Schwall, der allmählich in einen konstanten Volumenstrom übergeht.

a) Der nachstehende Graph stellt den Volumenstrom im 1. Kanal in den ersten 13 Sekunden nach Öffnen des Tores dar.



1) Lesen Sie ab, wann der Volumenstrom am stärksten ist.
2) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die momentane Änderungsrate des Volumenstroms zum Zeitpunkt $t = 1$ s.

b) Der Volumenstrom im 2. Kanal kann durch die Funktion f modelliert werden.

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}32 \cdot t^3 - 6{,}76 \cdot t^2 + 36{,}85 \cdot t + 10 & \text{für} \quad 0\text{ s} \leq t \leq 10{,}4\text{ s} \\ 22{,}03 & \text{für} \quad t > 10{,}4\text{ s} \end{cases}$$

t … Zeit in Sekunden (s)
$f(t)$ … Volumenstrom in m³/s nach t Sekunden

Das gesamte Wasservolumen, das im Zeitintervall $[a, b]$ durch den 2. Kanal fließt, kann durch $V = \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$ berechnet werden.

1) Berechnen Sie das Wasservolumen V, das in den ersten 13 Sekunden durch diesen Kanal geflossen ist.

c) Der Volumenstrom im 3. Kanal kann durch die Funktion g beschrieben werden.
$g(t) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

t ... Zeit in s
$g(x)$ ... Volumenstrom zur Zeit t in m³/s

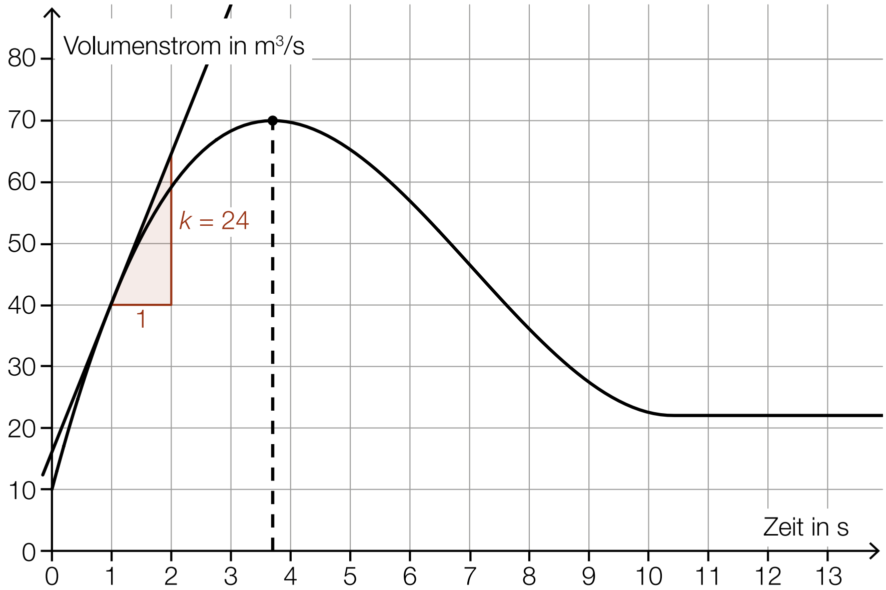
Zu Beginn beträgt der Volumenstrom 12 m³/s, nach 4 s wird das Maximum von 80 m³/s erreicht und nach 11 s beträgt der Volumenstrom 30 m³/s.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von g.

Möglicher Lösungsweg

a1) Der Volumenstrom im 1. Kanal erreicht nach ungefähr 3,7 s den höchsten Wert.
Toleranzintervall: [3,5 s; 3,9 s]

a2) Einzeichnen der Tangente bei $t = 1$ und Ablesen von $k = 24$
Toleranzintervall: [22; 26]



b1) $V(13) = \int_0^{10,4} (0{,}32 \cdot t^3 - 6{,}76 \cdot t^2 + 36{,}85 \cdot t + 10) \, \mathrm{d}t + 22{,}03 \cdot (13 - 10{,}4)$

$V(13) = 498{,}041\ldots + 57{,}278 \approx 555{,}32$

In 13 Sekunden fließen insgesamt rund 555,32 m³ Wasser durch den Kanal.

c1) $t = 0$; $g(0) = 12 \rightarrow d = 12$
$t = 4$; $g(4) = 80 \rightarrow 64 \cdot a + 16 \cdot b + 4 \cdot c + d = 80$
$t = 4$; $g'(4) = 0 \rightarrow 48 \cdot a + 8 \cdot b + c = 0$ … Maximum $\qquad (g'(t) = 3 \cdot a \cdot t^2 + 2 \cdot b \cdot t + c)$
$t = 11$; $g(11) = 30 \rightarrow 30 = 1331 \cdot a + 121 \cdot b + 11 \cdot c + d$